Los Números Complejos:

Una ecuación de la forma x2 + a = 0 , si a > 0, no tiene solución en el conjunto de los números reales. De aquí la necesidad de ampliar el campo numérico a un conjunto en el cual si fuera posible su resolución.

Para esto es necesario definir el símbolo “i” de tal forma que: i2 = -1, expresión sin sentido en IR, pero que denominaremos **“unidad imaginaria”** en un nuevo conjunto numérico al que llamaremos “Conjunto de los Números Complejos” y que simbolizaremos **C**.

En este nuevo conjunto tendrán sentido expresiones como la siguiente:

- 4 = 4 . -1 = 2.i

Y también tendrán solución ecuaciones cuadráticas como esta: x2 + 2 x + 5 = 0 , que en IR no se podían resolver, en la cual:

x1 = -2 + 2 i y x2 = -2 - 2 i

***Definiremos entonces al número complejo como par ordenado de números reales:***  z = ( a, b ) , a ∈ IR ∧ b ∈ IR

En él, la primera componente “a” se llama componente real y se anota R (z) = a y la segunda “b” se llama componente imaginaria y se anota I (z) = b

**El conjunto de los números complejos: C = IR x IR = IR2 = { (a,b) / a** ∈ **IR** ∧ **b** ∈ **IR }**

Recordemos que dos pares ordenados son iguales si son iguales cada una de sus

componentes, es decir: ( a , b ) = ( c , d ) ⇔ [ a = c ∧ b = d ]

El Cuerpo de los Números Complejos:

Definimos en el conjunto de los números complejos dos operaciones binarias internas:

La adición: + : **C** x **C** → **C**

( z, z’ ) → z + z’ tal que z + z’ = (a, b) + (c, d) = ( a+c , b+d )

La multiplicación: **.** : **C** x **C** → **C**

( z, z’ ) → z **.** z’ tal que z **.** z’ = (a, b) **.** (c, d) = ( a.c – b.d , a.d + b.c )

Estas operaciones verifican las propiedades:

En cuanto a la adición:

1. Asociativa: ( ∀ (z, z’, z’’) ∈ **C** 3 ) : ( z + z’ ) + z’’ = z + ( z’ + z’’ )
2. Existencia de elemento neutro: ( ∃ 0 ∈ **C** ) ( ∀ z ∈ **C** ) : 0 + z = z + 0 = z Siendo 0 = ( 0,0 )
3. Existencia de elementos opuestos: ( ∀ z ∈ **C** ) ( ∃ -z ∈ **C** ) : -z + z = z + (-z) = 0 Tal que z = ( a, b ) y –z = ( -a, -b )
4. Conmutativa: ( ∀ ( z, z’ ) ∈ **C** 2 ) : z + z’ = z’ + z

En cuanto a la multiplicación:

1. Asociativa: ( ∀ (z, z’, z’’) ∈ **C** 3 ) : ( z . z’ ) . z’’ = z . ( z’ . z’’ )
2. Existencia de elemento neutro: ( ∃ 1 ∈ **C** ) ( ∀ z ∈ **C** ) : 1 . z = z . 1 = z Siendo 1 = ( 1,0 )

1. Existencia de elementos inversos: ( ∀ z ∈ **C\*** ) ( ∃ z -1 ∈ **C\*** ) : z -1 . z = z . z -1 = 1

Tal que z = ( a, b ) y z-1 =⎛⎜⎝a2 a+ b2 ; a2- + b b2 ⎞⎟⎠

1. Conmutativa: ( ∀ ( z, z’ ) ∈ **C** 2 ) : z . z’ = z’ . z

Relacionándose ambas operaciones según la propiedad:

1. Distributiva de la multiplicación respecto de la adición:

( ∀ ( z, z’, z’’ ) ∈ **C** 3 ) : z . ( z’ + z’’ ) = z . z’ + z . z’’

**Por lo tanto el conjunto de los números complejos con la adición y la multiplicación que se acaban de definir tiene estructura algebraica de Cuerpo: ( C , + , . ) es un cuerpo.**

*(queda para los alumnos la demostración de las propiedades)*

- Los números reales y complejos se relacionan:

Los pares de la forma ( a, 0 ), que tienen componente imaginaria nula se comportan con estas operaciones como reales, esto nos permite definir una función entre el conjunto de los números reales y el conjunto que forman los números complejos con segunda componente nula, tal que a cada real “a” le asignamos el complejo ( a, 0 ) y resulta que esta función es biyectiva y respeta las operaciones del cuerpo, lo que justifica la afirmación de que el conjunto de números reales está incluido en el de los números complejos: IR ⊂ **C** .

Gracias a esta función podemos identificar a los complejos de la forma ( a, 0 ) con su parte real a y por convenio escribir: ( a, 0 ) = a

De manera análoga resulta que el par ( 0, 1 ) es la unidad imaginaria que al comienzo simbolizamos como i, es decir i = ( 0, 1 ), y dijimos que i2 = -1, lo que es fácil de comprobar:

( 0, 1 ) . ( 0, 1 ) = ( -1 , 0 ) = -1 (usando el convenio mencionado anteriormente)

Entonces si hacemos: b . i = ( b , 0 ) . ( 0 , 1 ) = ( 0 , b ) llegamos a otro convenio, el de escribir a los complejos con componente real nula usando la unidad imaginaria.

Es decir: ( 0 , b ) = b . i

Forma Binómica de un complejo:

Ahora bien si hacemos la suma de los pares:

( a, 0 ) + ( 0 , b ) = a + b i (usando ambos convenios)

Por lo tanto: ( a, 0 ) + ( 0 , b ) = ( a , b ) **= a + b i** “forma binómica”

Es otra forma de escribir el par ordenado ( a, b ), lo dicho con anterioridad justifica la escritura de números complejos en forma binómica.

Representación gráfica de los números complejos:

Hemos definido al conjunto **C** = IR x IR, por lo tanto cada punto del plano IR2 se corresponde con un número complejo, en el cual la componente real es la absisa del punto y la componente imaginaria la ordenada, además los vectores geométricos, trazados desde el origen de coordenadas hasta dicho punto del plano son usados para representar los números complejos.

IR

z = (a,b)

b

a IR

Complejos conjugados:

Dos números complejos se llaman conjugados si y sólo si tienen la misma parte real y sus partes imaginarias son números opuestos.

Notación: sea z = a + b i su conjugado z = a – b i

Dos complejos conjugados caracterizan dos puntos simétricos respecto del eje horizontal:

IR

z = (a,b)

b

a IR

z = (a, -b)

Propiedades:

1. - La suma de dos complejos conjugados es igual al duplo de la parte real.
2. – El producto de dos complejos conjugados es un número real no negativo.

Demostraciones:

1. – z + z = ( a + bi ) + ( a – bi ) = ( a + a ) + ( b + ( -b ) )i = 2a+ 0i = 2a = 2 Re(z)
2. – z . z = ( a + bi ) . ( a – bi ) = a.a – a.bi + a.bi – b.b.i2 = a2 + b2

Módulo de un complejo:

El módulo de un complejo es la distancia desde el punto de coordenadas (a,b) al centro del sistema de ejes cartesianos. Se calcula como la raíz cuadrada positiva de la suma de los cuadrados de las partes real e imaginaria. Notación: | z | = + a2 + b2 , siendo z = a + bi

Ejemplo: sea z = 2 – 3i entonces | z | = + 22 + (−3)2 = + 13

*Queda como tarea de investigación de los alumnos las propiedades del módulo de un complejo y sus respectivas demostraciones.*

Forma trigonométrica de un complejo:

Para determinar la forma trigonométrica del complejo z comenzamos analizando las coordenadas polares, estas son el módulo del complejo y su argumento, que es el ángulo medido en sentido positivo hasta el vector que representa al complejo z : Coordenadas polares: ( |z| , α )

A partir de las relaciones trigonométricas es posible pasar de coordenadas polares a cartesianas y viceversa.

|  |
| --- |
| a = cos α . | z | b = sen α . | z | |

Y

α

a

b

X

Por lo tanto si z = a + b i sustituyendo a las componentes real a e imaginaria b por las ecuaciones de pasaje de las coordenadas polares resulta:

z = a + b i = cos α . | z | + sen α . | z | i = | z | ( cos α + i . sen α )

Llegamos así a la forma trigonométrica de un complejo, que es otra forma de expresar al mismo número complejo.

z = | z | ( cos α + i . sen α )

Es claro que las coordenadas polares definen al complejo z, es por esto que suele decirse que el par ( | z |, α ) , módulo y argumento, es la forma polar del complejo z.

Forma exponencial de un complejo:

Se define la potenciación con exponente complejo y base e:

eix = cos x + i sen x

que verifica:

ei 0 = 1 , ya que quedaría e i 0 = cos 0 + i sen 0 = 1 + 0i = 1 e i 1 = ei , ya que 1 . i = i eix . eiy = ei (x + y ) , ya que eix . eiy = (cos x + i sen x) . (cos y + I sen y) =

= (cos x cos y – sen x sen y) + (sen x cos y + cos x sen y )i =

= cos (x + y) + sen (x + y) i = ei (x + y )

Sea el complejo z en forma trigonométrica: z = | z | ( cos α + i . sen α )

Es posible expresarlo así: z = | z | ei α que es la forma exponencial del complejo z.

**Teorema fundamental del Álgebra:**

“Todo polinomio de grado n con coeficientes complejos admite n raíces complejas, no necesariamente distintas.”

**p (x) = an xn + an -1xn -1 + … + a2x2 + a1x1 + a0x0** tiene como raíces: α**1,** α**2,** α**3, ... ,** α**n**

Una consecuencia de este teorema es que todo polinomio de grado n se puede expresar en función de sus n raíces:

*n* **p(x) = an (x -** α**1) (x -** α**2) (x -** α**3 ) ... (x -** α**n ) = an** ∏(*x*−α*i* )

*i*=1

Existe una relación entre las raíces de un polinomio y los coeficientes de él tal que:

i) La suma de las raíces es igual al segundo coeficiente cambiado de signo, dividido por el coeficiente principal. ii) La suma de los productos binarios de raíces es igual al tercer coeficiente dividido por el coeficiente principal.

1. Así sucesivamente vale para los productos ternarios, cuaternarios, etc., alternando los signos + y -.
2. El producto de las n raíces es igual al término independiente dividido por el coeficiente principal, con signo + o – según sea n par o impar

Ejemplo:

Determine el polinomio mónico (an = 1) cuyas raíces son: α1 = -1 , α2 = i , α3 = 1 + i , α4 = 2

p(x) = 1.(x - α1) (x - α2) (x - α3 ) (x - α4 ) polinomio de grado n = 4

p (x) = 1 x4 + a3 x 3 + a2x2 + a1x1 + a0

α1 + α2 + α3 + α4 = -1 + i + (1+i) +2 = 2 + 2i ⇒ a3 = -2 – 2i

α1 α2 + α1 α3 + α1 α4 + α2 α3 + α2 α4 + α3 α4 = (-1)i + (-1) (1 + i) + (-1)2 + i (1+i) + i 2 +(1+i)2 = 3i –2

⇒ a2 = 3i – 2

α1 α2 α3 + α1 α2 α4 + α1 α3 α4 + α2 α3 α4 = (-1)i (1+i) + (-1)i 2 + (-1)(1+i) 2 + i (1+i) 2 = -2i – 5

⇒ a1 = 2i + 5

α1 α2 α3 α4 = (-1) i (1+i) 2 = -2 + 2i ⇒ a0 = -2 + 2i

p (x) = 1 x4 + (-2 –2i) x3 + (3i – 2) x2 + (2i + 5) x + (-2+2i)